## ■ Déterminer les éventuelles asymptotes des fonctions suivantes

1. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{2x^2 + x - 6}$

2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{2x-1} - 3}$

3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} - x$

4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{3 - x}$

6. $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$

7. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

8. $f(x) = x\sqrt{x^2 - x - 20}$

9. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x-4}}$

10. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+7} - 3}{x - 2}$

11. $f(x) = x + \sqrt{x+5}$

12. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

13. $f(x) = \dfrac{(x-1)^{3/2}}{\sqrt{x+2}}$

14. $f(x) = -x + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 1$

15. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+2}}{x - 2}$

16. $f(x) = -x + \sqrt{x^2 - 3x - 10} + 2$

17. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 14} - \sqrt{x^2 - 2x - 15}$

18. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x - 14} + \sqrt{x^2 + 4x - 5}$

19. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{3x^2 + 5x - 2}$

20. $f(x) = \dfrac{2 - \sqrt{x+3}}{x - 1}$

### ■ Solutions

1. $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{3}{2}\}$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{2x^2 + x - 6} = -\frac{3}{7}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\ <}} \frac{x^3+2x^2-x-2}{2x^2+x-6} = -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to\frac{3}{2}\\ >}} \frac{x^3+2x^2-x-2}{2x^2+x-6} = +\infty \end{cases}$$

$\text{AV} \equiv x = \frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2-x-2}{2x^2+x-6} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2-x-2}{2x^2+x-6} = -\infty$$

$\text{AO} \equiv y = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$

2. Dom f = $[1, 5[ \cup ]5, \longrightarrow$

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3} = 1$$

$$\lim_{x\to5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3} \quad \text{n'existe pas}$$

$\text{AH} \equiv y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ à droite

3. Dom f = $\longleftarrow, -1] \cup [3, \longrightarrow$

$$\lim_{x\to-1} \sqrt{x^2-2x-3} - x = 1$$

$$\lim_{x\to3} \sqrt{x^2-2x-3} - x = -3$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x-3} - x = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x-3} - x = +\infty$$

$\text{AH} \equiv y = -1$ à droite

4. Dom f = $\longleftarrow, 1] \cup [2, \longrightarrow$

$$\lim_{x\to1} \sqrt{x^2-3x+2} = 0$$

$$\lim_{x\to2} \sqrt{x^2-3x+2} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-3x+2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-3x+2} = +\infty$$

$\text{AO} \equiv y = x - \frac{3}{2}$ à droite

$\text{AO} \equiv y = \frac{3}{2} - x$ à gauche

5. Dom f = $\longleftarrow, -1] \cup [1, 3[ \cup ]3, \longrightarrow$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{3-x} = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{3-x} = 0$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 3\\<}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{3-x} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 3\\>}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{3-x} = -\infty \end{cases}$$

$\text{AV} \equiv x = 3$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{3-x} = -1$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{3-x} = 1$$

$\text{AH} \equiv y = -1$ à droite

$\text{AH} \equiv y = 1$ à gauche

6. Dom f = $[1, \longrightarrow$

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{x-1} - \sqrt{x} = -1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x} \quad \text{n'existe pas}$$

$\text{AH} \equiv y = 0$ à droite

7. Dom f = $]-2, 2[$

$$\lim_{\substack{x\to -2\\>}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty$$

$\text{AV} \equiv x = -2$ a droite

$$\lim_{\substack{x\to 2\\<}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty$$

$\text{AV} \equiv x = 2$ a gauche

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{n'existe pas}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{n'existe pas}$$

8. Dom f = $\longleftarrow, -4] \cup [5, \longrightarrow$

$$\lim_{x\to -4} x\sqrt{x^2-x-20} = 0$$

$$\lim_{x\to 5} x\sqrt{x^2-x-20} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\sqrt{x^2-x-20} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} x\sqrt{x^2-x-20} = -\infty$$

9. Dom f = $\longleftarrow, 3] \cup ]4, \longrightarrow$

$\lim_{x\to 3} \sqrt{\dfrac{x-3}{x-4}} = 0$

$\lim_{\substack{x\to 4\\ >}} \sqrt{\dfrac{x-3}{x-4}} = +\infty$

AV $\equiv x = 4$ a droite

$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{x-3}{x-4}} = 1$

$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{\dfrac{x-3}{x-4}} = 1$

AH $\equiv y = 1$

10. Dom f = $[-7, 2[\,\cup\,]2, \longrightarrow$

$\lim_{x\to -7} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \dfrac{1}{3}$

$\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \dfrac{1}{6}$

$\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = 0$

$\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ n'existe pas

AH $\equiv y = 0$ à droite

11. Dom f = $[-5, \longrightarrow$

$\lim_{x\to -5} x + \sqrt{x+5} = -5$

$\lim_{x\to +\infty} x + \sqrt{x+5} = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} x + \sqrt{x+5}$ n'existe pas

12. Dom f = $\mathbb{R}$

pas d'asymptote verticale

$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = 0$

$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty$

AH $\equiv y = 0$ à droite

13. Dom f = $[1, \longrightarrow$

$\lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^{3/2}}{\sqrt{x+2}} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \dfrac{(x-1)^{3/2}}{\sqrt{x+2}} = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} \dfrac{(x-1)^{3/2}}{\sqrt{x+2}}$ n'existe pas

AO $\equiv y = x - \dfrac{5}{2}$ à droite

14. Dom f = $\longleftarrow, -1] \cup [3, \longrightarrow$

$\lim_{x\to -1} -x+\sqrt{x^2-2x-3}-1=0$

$\lim_{x\to 3} -x+\sqrt{x^2-2x-3}-1=-4$

$\lim_{x\to +\infty} -x+\sqrt{x^2-2x-3}-1=-2$

$\lim_{x\to -\infty} -x+\sqrt{x^2-2x-3}-1=+\infty$

AH ≡ $y=-2$ à droite

15. Dom f = $[\frac{2}{3}, 2[\cup]2, \longrightarrow$

$\lim_{x\to \frac{2}{3}} \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}{x-2}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}{x-2}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}{x-2}=0$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}{x-2}$ n'existe pas

AH ≡ $y=0$ à droite

16. Dom f = $\longleftarrow, -2]\cup[5, \longrightarrow$

$\lim_{x\to -2} -x+\sqrt{x^2-3x-10}+2=4$

$\lim_{x\to 5} -x+\sqrt{x^2-3x-10}+2=-3$

$\lim_{x\to +\infty} -x+\sqrt{x^2-3x-10}+2=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to -\infty} -x+\sqrt{x^2-3x-10}+2=+\infty$

AH ≡ $y=\frac{1}{2}$ à droite

17. Dom f = $\longleftarrow, -3]\cup[7, \longrightarrow$

$\lim_{x\to -3} \sqrt{x^2-5x-14}-\sqrt{x^2-2x-15}=\sqrt{10}$

$\lim_{x\to 7} \sqrt{x^2-5x-14}-\sqrt{x^2-2x-15}=-2\sqrt{5}$

$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-5x-14}-\sqrt{x^2-2x-15}=-\frac{3}{2}$

$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-5x-14}-\sqrt{x^2-2x-15}=\frac{3}{2}$

AH ≡ $y=-\frac{3}{2}$ à droite

AH ≡ $y=\frac{3}{2}$ à gauche

18. Dom f = $\longleftarrow, -5]\cup[7, \longrightarrow$

$\lim_{x\to -5} \sqrt{x^2-5x-14}+\sqrt{x^2+4x-5}=6$

$\lim_{x\to 7} \sqrt{x^2-5x-14}+\sqrt{x^2+4x-5}=6\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-5x-14} + \sqrt{x^2+4x-5} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-5x-14} + \sqrt{x^2+4x-5} = +\infty$$

AO $\equiv y = 2x - \frac{1}{2}$ à droite

AO $\equiv y = \frac{1}{2} - 2x$ à gauche

19. Dom f = $\mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{3}\}$

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^2-4}{3x^2+5x-2} = \frac{4}{7}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\<}} \frac{x^2-4}{3x^2+5x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{3}\\>}} \frac{x^2-4}{3x^2+5x-2} = -\infty \end{cases}$$

AV $\equiv x = \frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{3x^2+5x-2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{3x^2+5x-2} = \frac{1}{3}$$

AH $\equiv y = \frac{1}{3}$

20. Dom f = $[-3, 1[ \cup ]1, \longrightarrow$

$$\lim_{x\to-3} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} \quad \text{n'existe pas}$$

AH $\equiv y = 0$ à droite