2. Image d'une fonction

Définition : soit f, une fonction réelle

im f = $\{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ et } x \in \text{dom } f\}$

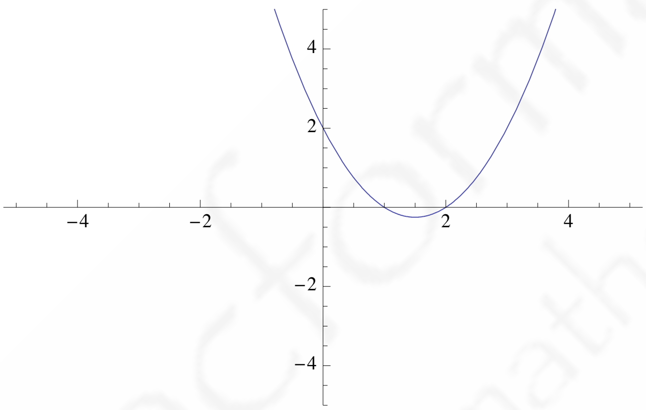
Déterminer l'image d'une fonction, c'est trouver les réels y qui sont image d'une réel par f, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les images.

Il n'est pas possible, à ce stade du cours, de trouver l'image d'une fonction algébrique quelconque.
Nous nous contentons donc des fonctions connues telles que les fonctions élémentaires (1/x, |x|, ...) et les fonctions du 1er et 2nd degré. Sans oublier les fonctions obtenues par manipulation du graphe cartésien des fonctions élémentaires.
En fait, il est surtout facile de déterminer l'image si l'on connait le graphe cartésien de la fonction.

exemple: *déterminer l'image d'une fonction du second degré*

$f(x) = x^2 - 3x + 2$

Le coefficient a de x^2 étant positif, la parabole tourne sa concavité vers le haut.



L'image de la fonction est donc l'ensemble des valeurs réelles plus grandes ou égale à l'ordonnée du sommet.

L'ordonnée du sommet est donnée par $f(\frac{-b}{2a}) = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4}$

Dès lors,

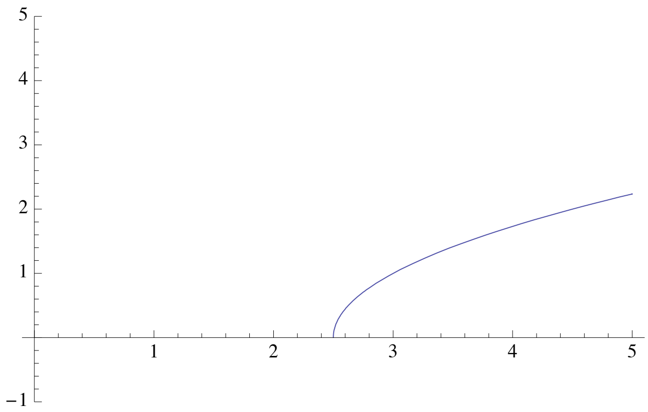
$\text{im } f = [\frac{-1}{4}, \rightarrow$

exemple: *déterminer l'image d'une fonction à radical*

$f(x) = \sqrt{2x - 5}$

Le domaine de définition est $[\frac{5}{2}, \rightarrow$

La valeur minimum de cette racine carrée est évidemment 0 (obtenue pour $x = \frac{5}{2}$*)*



L'image de cette fonction est l'ensemble

im f = [0 , →

Exercices - Déterminer l'image des fonctions suivantes

1) f(x) = $-x^2 + 3x + 4$

im f = ⟵, $\frac{25}{4}$]

2) f(x) = $5x + 2$

im f = ℝ

3) f(x) = $\sqrt{2x - 3} + 1$

im f = [1, ⟶

4) f(x) = $x^2 + x + 5$

im f = [$\frac{19}{4}$, ⟶