Exercices résolus - Probabilités

- EXPROBA01. On choisit au hasard et sans remise trois ampoules électriques parmi un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses. Quelle est la probabilité d'obtenir
  a) aucune ampoule défectueuse; *0.263736*
  b) au moins une ampoule défectueuse? *0.736264*
  b) exactement une ampoule défectueuse? *0.494505*

- Solution détaillée

L'expérience consiste à choisir 5 objets parmi 15: nbre de possibilités =NCP= C_{15}^3

a) On doit prendre 3 ampoules non défectueuses parmi les 10 non défectueuses: NCF $= C_{10}^3$

$$P(A) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{10!}{7!\,3!}\,\frac{3!\,12!}{15!} = \frac{24}{91} = 0.263736$$

oubien plus simplement $\frac{10}{15}\,\frac{9}{14}\,\frac{8}{13}$

b) Prendre "au moins une ampoule défectueuse" correspond à en prendre 1 ou 2 ou 3. On peut donc calculer
$P(1\text{ déf}) + P(2\text{ déf}) + P(3\text{ déf})$
mais il est plus simple de considérer l'événement contraire qui est "n'obtenir aucune ampoule défectueuse", probabilité calculée au (a).

Donc $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91} = 0.736264$

c) Il faut choisir une ampoule défectueuse parmi 5 et deux non défectueuses parmi 10, ce qui donne NCF $= C_5^1\,C_{10}^2$ et

$$P(C) = \frac{C_5^1\,C_{10}^2}{C_{15}^3} = 5\,\frac{10!}{8!\,2!}\,\frac{3!\,12!}{15!} = \frac{45}{91} = 0.494505$$

oubien on envisage la possibilité DBB (défectueuse puis bonne puis bonne) qui a pour probabilité $\frac{5}{15}\,\frac{10}{14}\,\frac{9}{13}$ et on multiplie par 3 puisqu'il y a trois ordres possibles: DBB, BDB ou BBD

$$\frac{5}{15}\,\frac{10}{14}\,\frac{9}{13}\,3 = \frac{45}{91}$$

- EXPROBA02. On tire au hasard et sans remise deux cartes d'un jeu de 52 cartes.
  Calculer la probabilité que
  a) les deux cartes soient des piques; *0.0588235*
  b) une carte soit un pique et l'autre un coeur. *0.127451*

- Solution détaillée

L'expérience consiste à choisir 2 cartes parmi 52, donc NCP : $C_{52}^2 = \frac{52!}{50!\,2!} = 1326$

a) On doit choisir 2 piques parmi les 13 piques et donc NCF $= C_{13}^2 = \frac{13!}{11!\,2!} = 78$

$$P(P_1 \cap P_2) = \frac{\text{NCF}}{\text{NCP}} = \frac{C_{13}^2}{C_{52}^2} = \frac{13!}{11!\,2!}\,\frac{2!\,50!}{52!} = \frac{1}{17} = 0.0588235$$

oubien on choisit d'abord un pique, probabilité $\frac{13}{52}$ et puis on choisit un 2ème pique, probabilité $\frac{12}{51}$, ce qui donne

$$P(P_1 \cap P_2) = \frac{13}{52}\,\frac{12}{51} = \frac{1}{17}$$

b) On doit choisir un pique parmi les 13 piques et un coeur parmi les 13 coeurs donc NCF $= C_{13}^1\,C_{13}^2 = 13 \times 13 = 169$

et P(un pique et un coeur) $= \frac{C_{13}^1\,C_{13}^2}{C_{52}^2} = \frac{13}{102} = 0.127451$

oubien on considère les possibilités suivantes: on tire (d'abord un pique et puis un coeur) oubien (d'abord un coeur et puis un pique) ce qui donne

$$P(\text{un pique et un coeur}) = P(P_1 \cap C_2) + P(C_1 \cap P_2) = \frac{13}{52}\,\frac{13}{51} + \frac{13}{52}\,\frac{13}{51} = \frac{13}{102}$$

- EXPROBA03. Un test comporte 10 questions à choix multiples. Chaque question a 3 réponses proposées dont une seule est correcte, Si un étudiant choisit au hasard la réponse à chaque question, quelle est la probabilité qu'il réponde correctement
a) à toutes les questions; *0.0000169351*
b) à exactement 1 question(s); *0.00867076*
c) à plus d'une question ? *0.895951*

- Solution détaillée

On note V une bonne réponse et X une mauvaise. $P(V) = \frac{1}{3}$ et $P(X) = \frac{2}{3}$

a) Il n'y a qu'une manière d'obtenir 10 bonnes réponses: VVVVVVVVVV et donc $P(A) = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = \frac{1}{59\,049} = 0.0000169351$

b) Ici, il faut répondre correctement à une réponse parmi 10 (donc $C_{10}^{1} = 10$ possibilités) et la probabilité de XVVVVVVVVV est $\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{9}$

$P(B) = C_{10}^{1}\,\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{9} = \frac{5120}{59\,049} = 0.00867076$

c) Pour répondre à plus d'une question, on peut répondre à 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10 questions. Plutôt que de faire la somme des probabilités de ces événements, on recherche la probabilité de l'événement contraire qui est "obtenir zéro ou une bonne réponse"

On fait donc $P(C) = 1 - P(A) - P(B)$

$P(C) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10} - 10 \times \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{9} = 1 - \frac{1024}{59\,049} - \frac{5120}{59\,049} = \frac{17\,635}{19\,683} = 0.895951$

remarque: la loi de probabilité mesurant le nombre de bonnes réponses est une loi binomiale Bi(n;p) où le nombre de tentatives est $n = 10$ et la probabilité de succès est $p = \frac{1}{3}$

- EXPROBA04. Un dé à six faces possède 3 faces rouges, 2 jaunes et une face bleue. On lance ce dé trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir
a) trois faces rouges *1/8*
b) aucune face rouge *1/8*
c) au moins une face jaune 19/27
d) exactement deux faces jaunes *2/9*
e) deux faces jaunes et une face rouge *1/6*

- Solution détaillée

a) Il suffit d'obtenir une face rouge et puis une face rouge et enfin une face rouge, la probabilité d'une face rouge étant $\frac{3}{6}$.

$P(\text{RRR}) = \frac{3}{6}\,\frac{3}{6}\,\frac{3}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$

b) de la même manière, la probabilité de ne pas obtenir une face rouge étant $\frac{3}{6}$,

$P(\text{aucune } R \text{ aux trois lancers}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$

c) au moins une face jaune correspond à 1 ou 2 ou 3 faces jaunes; on calcule alors plutôt la probabilité de l'événement contraire:

$P(\text{au} - 1\,J) = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^{3} = \frac{19}{27}$

d) Il y a trois ordres possibles: JJX, JXJ et XJJ (où X correspond à 'non jaune')

et donc $\text{P}(2\,\text{J}) = 3\left(\frac{2}{6}\right)^{2}\frac{4}{6} = \frac{2}{9}$

e) Il y a 3 ordres possibles: JJR, JRJ et RJJ et donc $\text{P}(2\,\text{J}) = 3\left(\frac{2}{6}\right)^{2}\frac{3}{6} = \frac{1}{6}$

- EXPROBA05. Un certain type de missiles atteint son but avec une probabilité de 0.3.
a) Quelle est la probabilité de ne pas atteindre le but une seule fois en trois essais? *0.343*
b) Quelle est la probabilité de l'atteindre au moins une fois en trois essais? *0.657*
c) Quelle est la probabilité de l'atteindre quatre fois en 7 essais? *0.0972405*

- Solution détaillée

a) Il faut qu'il rate le but trois fois de suite:
$P(3 \text{ échecs}) = 0.7^3 = 0.343$
b) On utilise l'événement contraire, calculé en (a)
$P(\text{au} - 1 \times) = 1 - 0.343 = 0.657$
c) Il faut toucher la cible 4 fois (VVVV) et la rater trois fois (XXX) par exemple dans l'ordre suivant: VVVVXXX donc la probabilité est $0.3^4\, 0.7^3$.
Mais cela peut arriver dans un ordre différent - combien y a-t-il d'anagrammes de VVVVXXX : $\frac{7!}{4! \times 3!} = 35$ possibilités.
On peut aussi calculer les ordres en se disant qu'il faut choisir parmi les 7 tirs quels sont les 4 que l'on va réussir, on coisit alors 4 tirs parmi 7: $C_7^4 = \frac{7!}{4! \times 3!} = 35$ possibilités
$P(4 \times) = C_7^4\, 0.3^4\, 0.7^3 = 35 \times 0.0027783 = 0.0972405$

- EXPROBA06. On tire, sans remise, deux cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité pour que
  a) la première carte tirée soit un pique; *1/4*
  b) la seconde soit un 10 si la première est un pique; *1/13*
  c) les deux cartes soient des as. *1/221*

- Solution détaillée

a) de manière évidente, on doit choisir un des 13 piques parmi les 52 cartes: $P(P_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
b) Soit "10_2" l'événement "la seconde carte est un "10" et "P_1" l'évenement "la première carte tirée est un pique".
On cherche $P(10_2 \mid P_1)$. Appliquons la formule de probabilité conditionnelle $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
$10_2 \cap P_1$ peut se réaliser de deux manières; en tirant (d'abord un pique qui n'est pas l'as et puis n'importe quel as) ou (d'abord l'as de pique et puis un des trois autres as); ce qui donne $\frac{12}{52}\frac{4}{51} + \frac{1}{52}\frac{3}{51}$

$$P(10_2 \mid P_1) = \frac{P(10_2 \cap P_1)}{P(P_1)} = \frac{\frac{12}{52}\frac{4}{51} + \frac{1}{52}\frac{3}{51}}{\frac{13}{52}} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{13}$$

On voit que les deux événements sont indépendants, savoir que l'on a tiré un pique en premier ne nous donne aucune indication d'obtenir un as ensuite, on a toujours une chance sur 13
(4/52).
$P(10_2 \cap P_1) = \frac{12}{52}\frac{4}{51} + \frac{1}{52}\frac{3}{51} = P(10_2)\,P(P_1) = \frac{4}{52}\frac{13}{52} = \frac{1}{52}$ (définition d'indépendance)
c) Simplement, $P(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{52}\frac{3}{51} = \frac{1}{221}$