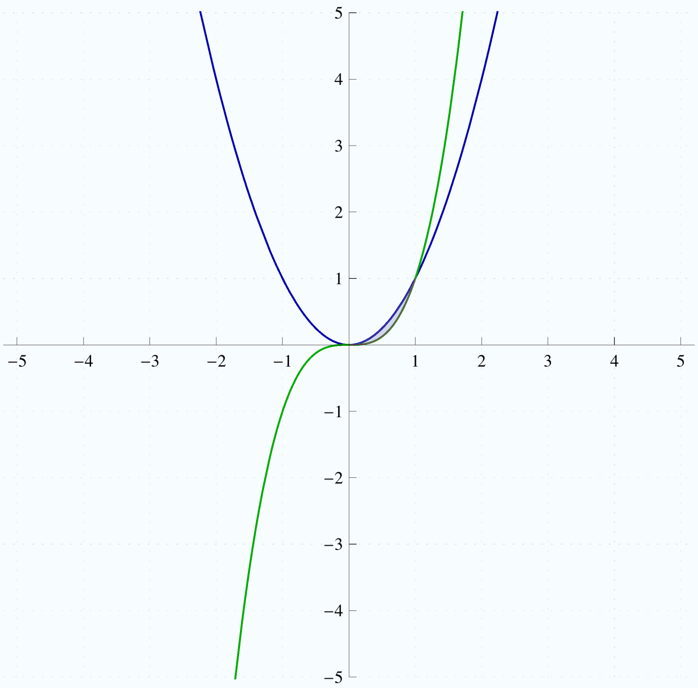
Calcul d'aires et de volumes

- 1. Calculer l'aire de la partie comprise entre les courbes $y = x^2$ et $y = x^3$. Calculer le volume de révolution de cette surface.

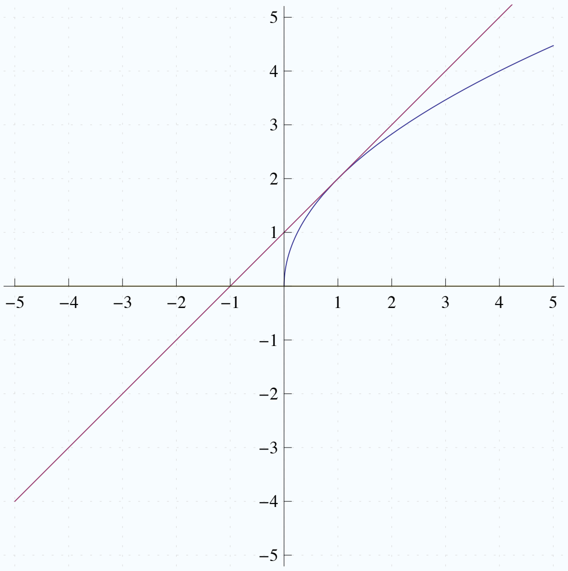


Aire : $\int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{12}$

S = 0.0833333

Volume: $\int_0^1 \pi\, (x^4 - x^6)\, dx = \left[\frac{\pi x^5}{5} - \frac{\pi x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{35}$

- 2. Calculer l'aire de la région bornée par la courbe d'équation $y = 2\sqrt{x}$, la droite $y = x + 1$ et l'axe des abscisses. Calculer le volume de révolution de cette surface.



$S_1 = \int_{-1}^{0}(x+1)\,dx = \left[\ \frac{x^2}{2} + x\ \right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}$ (surface d'un triangle!)

$S_2 = \int_{0}^{1}\left(x - 2\sqrt{x} + 1\right)dx = \left[\ \frac{x^2}{2} - \frac{4\,x^{3/2}}{3} + x\ \right]_{0}^{1} = \frac{1}{6}$

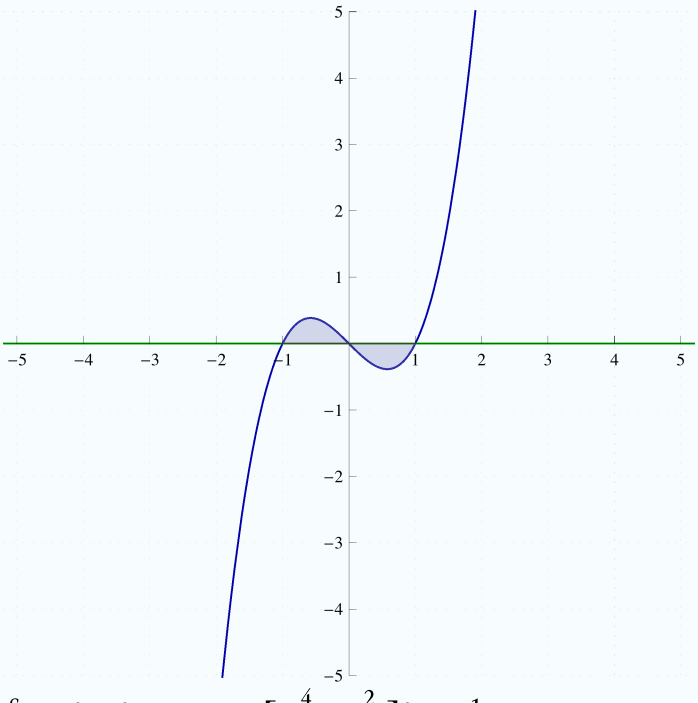
$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$V_1 = \int_{-1}^{0}\pi\,(x+1)^2\,dx = \left[\ \frac{1}{3}\,\pi\,(x+1)^3\ \right]_{-1}^{0} = \frac{\pi}{3}$

$V_2 = \int_{0}^{1}\pi\left((x+1)^2 - 4\,x\right)dx = \left[\ \frac{\pi\,x^3}{3} - \pi\,x^2 + \pi\,x\ \right]_{0}^{1} = \frac{\pi}{3} = 1.0472$

$V = 2\,\frac{\pi}{3}$

- 3. Calculer l'aire de la région bornée par la courbe d'équation y $= x^3 - x$ et l'axe des abscisses. Calculer le volume de révolution de cette surface.

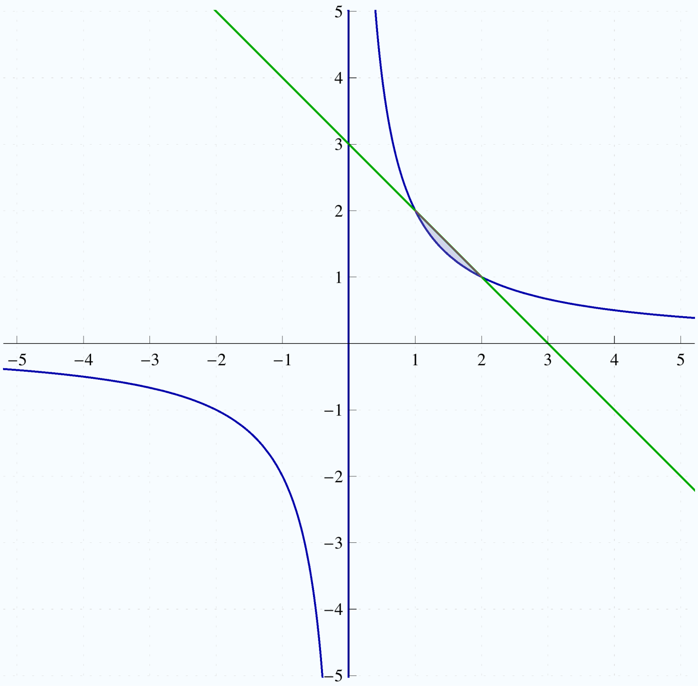


$\frac{S}{2} = \int_{-1}^{0}\left(x^3 - x\right)dx = \left[\ \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\ \right]_{-1}^{0} = \frac{1}{4}$

$S = \frac{1}{2} = 0.5$

$V = \int_{-1}^{1}\pi\left(x^3 - x\right)^2 dx = \left[\ \frac{\pi\,x^7}{7} - \frac{2\,\pi\,x^5}{5} + \frac{\pi\,x^3}{3}\ \right]_{-1}^{1} = \frac{16\,\pi}{105}$

- 4. Calculer l'aire de la région bornée par la courbe d'équation $y = \frac{2}{x}$ et la droite $y = 3 - x$. Calculer le volume de révolution de cette surface.

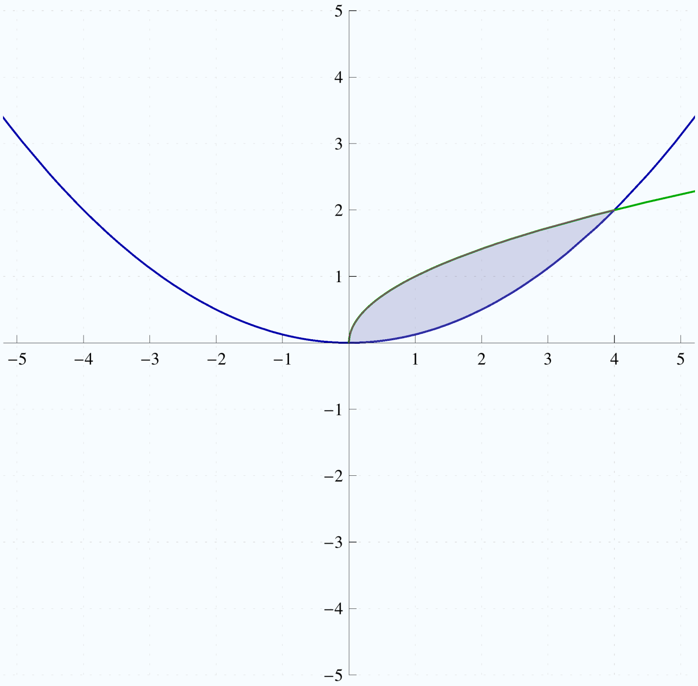


$\int_1^2 \left(-x + 3 - \frac{2}{x}\right) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 3\,x - 2\ln(|x|) \right]_1^2 = \frac{3}{2} - \ln(4)$

S = 0.113706

$V = \int_1^2 \pi \left((3 - x)^2 - \frac{4}{x^2}\right) dx = \left[\frac{\pi\,x^3}{3} - 3\,\pi\,x^2 + 9\,\pi\,x + \frac{4\,\pi}{x} \right]_1^2 = \frac{\pi}{3}$

- 5. Calculer l'aire de la région bornée par la courbe d'équation $y = \frac{x^2}{8}$ et la courbe $y = \sqrt{x}$. Calculer le volume de révolution de cette surface.

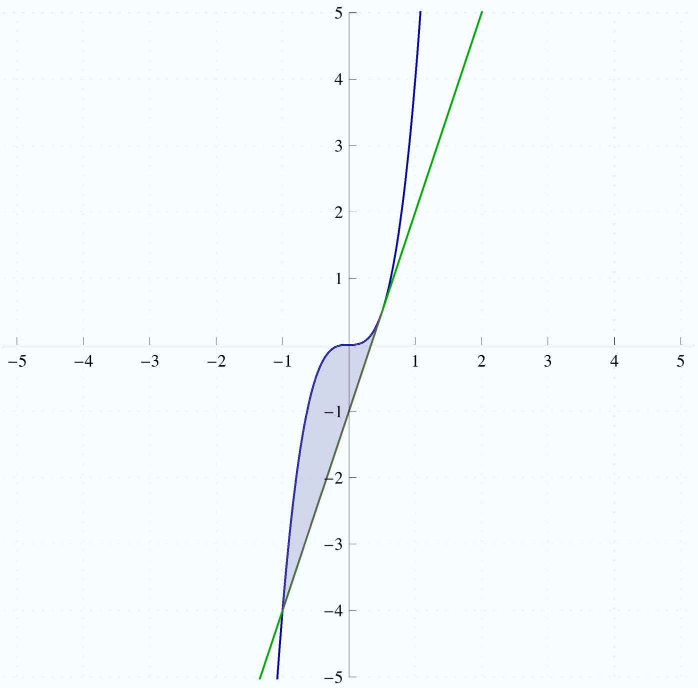


$$\int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{x^2}{8}\right) dx = \left[\ \frac{2\,x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{24}\ \right]_0^4 = \frac{8}{3}$$

S = 2.66667

$$V = \int_0^4 \pi \left(x - \frac{x^4}{64}\right) dx = \left[\ \frac{\pi\,x^2}{2} - \frac{\pi\,x^5}{320}\ \right]_0^4 = \frac{24\,\pi}{5}$$

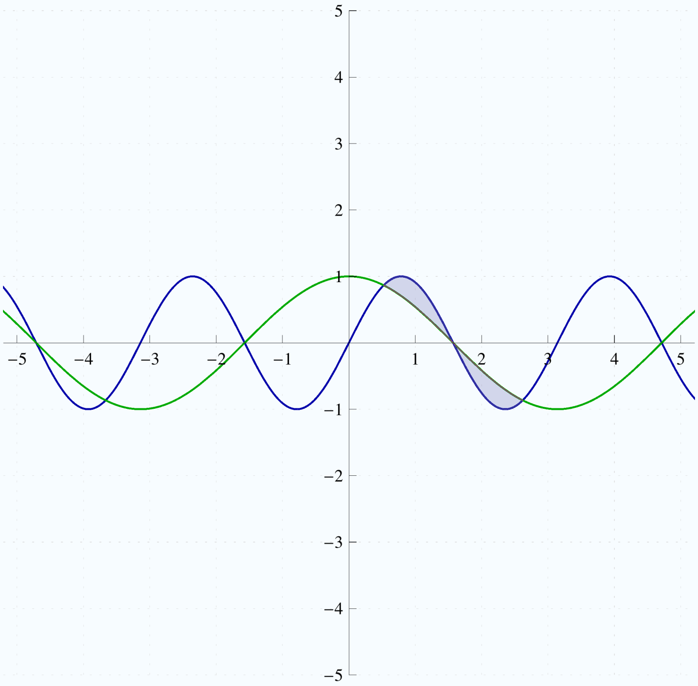
- 6. Calculer l'aire de la région bornée par la courbe d'équation $y = 4\,x^3$ et la droite $y = 3\,x - 1$.



$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(4\,x^3 - 3\,x + 1\right) dx = \left[\ x^4 - \frac{3\,x^2}{2} + x\ \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{27}{16}$$

S = 1.6875

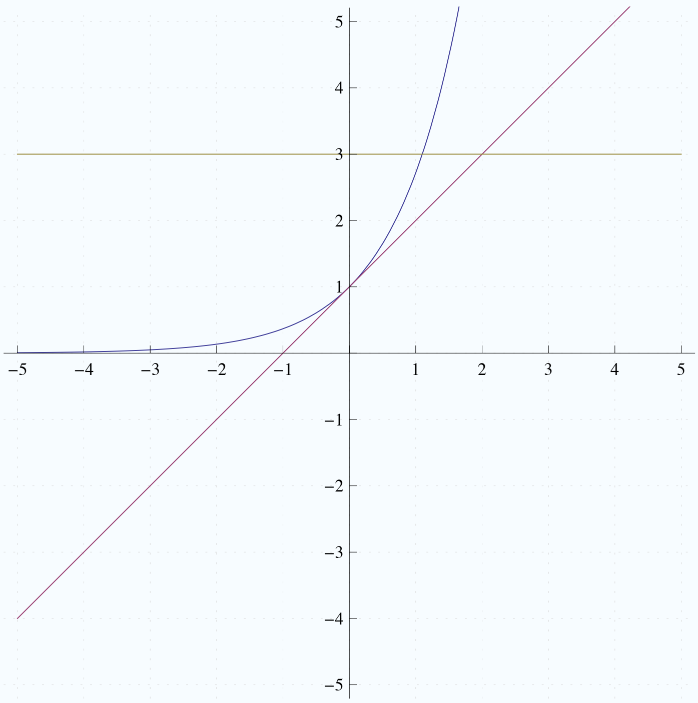
- 7. Calculer l'aire de la région bornée par la courbe d'équation $y\ =\ \sin 2\,x$ et la courbe $y = \cos x$. (ne regarder les 2 courbes que sur l'intervalle $[0{,}2\pi]$)



$$\frac{S}{2} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2\,x) - \cos(x))\, dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2\,x) - \sin(x) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$S = \frac{1}{2}$$

- 8. Calculer l'aire de la région bornée par la courbe d'équation $y = e^x$, la droite $y = x + 1$ et la droite $y = 3$.

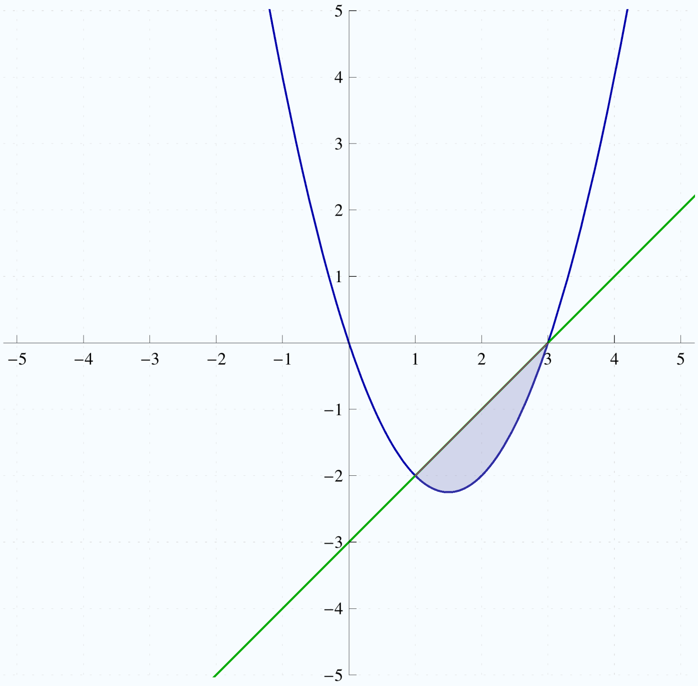


$$S_1 = \int_0^{\ln(3)} (-x + e^x - 1)\, dx = \left[-\frac{x^2}{2} - x + e^x \right]_0^{\ln(3)} = 2 - \ln(3) - \frac{\ln^2(3)}{2}$$

$$S_2 = \int_{\ln(3)}^{2} (3 - (x + 1))\, dx = \left[2\,x - \frac{x^2}{2} \right]_{\ln(3)}^{2} = 2 + \frac{\ln^2(3)}{2} - \ln(9) = 2 + \frac{\ln^2 3}{2} - 2\ln 3$$

$$S = 4 - 3\ln 3 = 0.704163$$

- 9. Calculer l'aire de la région bornée par la courbe d'équation $y = x^2 - 3\,x$ et la droite $y = x - 3$. Calculer le volume de révolution de cette surface.

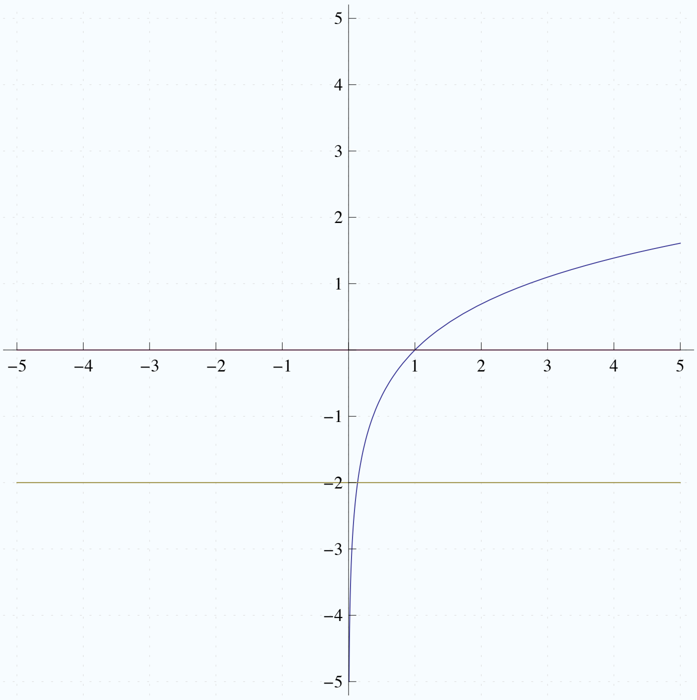


$\int_1^3 \left(-x^2 + 4x - 3\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = \frac{4}{3}$

S = 1.33333

$V = \int_1^3 \pi \left(\left(x^2 - 3x\right)^2 - (x-3)^2\right) dx = \left[\pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{2} + \frac{8x^3}{3} + 3x^2 - 9x \right) \right]_1^3 = \frac{56\pi}{15}$

- 10. Calculer l'aire de la région bornée par la courbe d'équation $y = \ln x$, la droite $y = -2$ et les deux axes.(Calculer le volume de révolution de cette surface... *difficile*)



$S_1 = \int_0^{\frac{1}{e^2}} 2\, dx = \left[\, 2\, x \,\right]_0^{\frac{1}{e^2}} = \frac{2}{e^2}$

$S_2 = \int_{\frac{1}{e^2}}^{1} -\ln(x)\, dx = \left[\, x - x\ln(x) \,\right]_{\frac{1}{e^2}}^{1} = 1 - \frac{3}{e^2}$

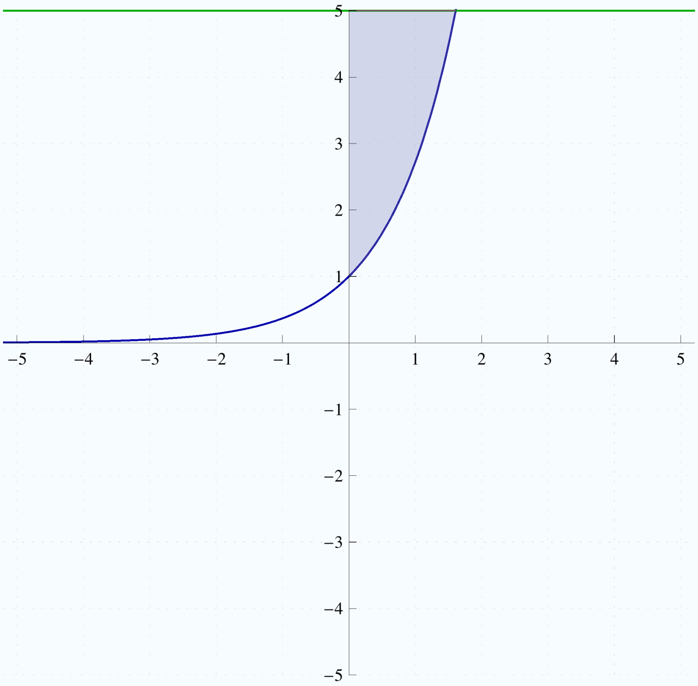
$S = 1 - \frac{1}{e^2} = 0.864665$

$V_1 = \int_0^{\frac{1}{e^2}} 4\,\pi\, dx = \left[\, 4\,\pi\, x \,\right]_0^{\frac{1}{e^2}} = \frac{4\,\pi}{e^2}$

$V_2 = \int_{\frac{1}{e^2}}^{1} \pi \ln^2(x)\, dx = \left[\, \pi\left(x\ln^2(x) - 2\,x\ln(x) + 2\,x\right) \,\right]_{\frac{1}{e^2}}^{1} = \left(2 - \frac{10}{e^2}\right)\pi$

$V = \pi\left(2 - \frac{6}{e^2}\right) = 3.73218$

- 11. Calculer l'aire de la région bornée par la courbe d'équation $y = e^x$, la droite $y = 5$ et l'axe des ordonnées. Calculer le volume de révolution de cette surface.



$\int_0^{\ln(5)} (5 - e^x)\, dx = \left[\, 5x - e^x \,\right]_0^{\ln(5)} = -4 + 5\ln(5)$

S = 4.04719

$V = \int_0^{\ln(5)} \left(25 - e^{2x}\right) \pi\, dx = \left[\, -\pi \left(\frac{e^{2x}}{2} - 25x\right) \right]_0^{\ln(5)} = \pi\,(-12 + 25\ln(5)) = 88.7058$